УДК 519.62 + 517.929 + 519.21

А. С. Паутов

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

1. Введение

Теория численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений в настоящее время бурно развивается [1]. Один из наиболее эффективных подходов [2] основывается на дискретизации только временного интервала (в отличие от подхода [3]) и использовании в дискретные моменты стохастических аналогов разложения Тейлора. Эти теории находят все больше приложений в математическом моделировании различных процессов.

В то же время во многих моделях окружающей действительности для более адекватного описания явления приходится вводить в модель запаздывания по времени различных видов. В теории численного моделирования таких объектов, называемых детерминированными функционально-дифференциальными уравнениями (ФДУ), один из подходов [4] основан на идее разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих, построении по конечномерной составляющей полных аналогов численных методов, известных для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, и учете бесконечномерной составляющей с помощью интерполяции с заданными свойствами.

В настоящей работе предложен простейший метод численного интегрирования нового объекта – системы стохастических функционально-дифференциальных уравнений, основанный на комбинации идей работ [2,4]. Отметим, что численные методы решения стохастических ФДУ частного вида (автономных уравнений с одним постоянным сосредоточенным запаздыванием) изучались в [5].

2. Постановка задачи

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и стандартный винеровский случайный вектор-процесс $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ с независимыми компонентами $\mathbf{w}_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, т. е. (см. [6]) процесс со стационарными независимыми приращениями, имеющими гауссовское распределение вероятностей, причем

$$\mathsf{M}(\mathbf{w}(t)-\mathbf{w}(s))=\mathbf{0},\ \mathsf{M}(\mathbf{w}(t)-\mathbf{w}(s))(\mathbf{w}(t)-\mathbf{w}(s))'=|t-s|E,\ \mathbf{w}(t_0)=0$$

(здесь $\mathbf{0}$ – нуль-вектор, т. е. вектор, все компоненты которого – нули; E – единичная матрица; M обозначает математическое ожидание). Рассмотрим совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t\in[t_0,T]\}$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и связанных с винеровским процессом $\mathbf{w}(t)$ так, что

1) $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$ при $s<t$;

2) $\mathbf{w}(t)$ измерим относительно $\mathcal{F}_t$ при каждом $t\in[t_0,T]$;

3) процесс $\mathbf{w}(t+t_0+\Delta)-\mathbf{w}(t_0+\Delta)$ при всех $\Delta\geq 0;\ t>0$ не зависит от событий σ-алгебры $\mathcal{F}(t_0+\Delta)$. В дальнейшем будем называть винеровский процесс $\mathbf{w}(t)$, удовлетворяющий условиям 2 и 3, *согласованным с совокупностью σ-алгебр* $\{\mathcal{F}_t, t\in[t_0,T]\}$.

Рассмотрим систему стохастических ФДУ Ито с ограниченным последействием вида

$$d\mathbf{x}(t)=a(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{x}_t(\cdot))\ dt+D(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{x}_t(\cdot))\ d\mathbf{w}(t); \tag{1}$$

$(\mathbf{x}_t(\cdot)=\{\mathbf{x}(t+s),-\tau\leq s<0\})$ с начальными условиями

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0, \tag{2}$$

$$\mathbf{x}_{t_0}(\cdot)=\{\mathbf{y}^0(s),-\tau\leq s<0\} \tag{3}$$

($\mathbf{x}_0$ – случайный вектор, $\mathbf{y}^0(s)$ – случайный вектор-процесс). В (1)–(3) t – независимая переменная (время), $t\in\mathbb{R}$; $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t,\omega)$ – искомый векторный случайный процесс, $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^l_\omega$. Здесь $\mathbb{R}^l_\omega$ – пространство случайных векторов (компоненты которых имеют конечный второй момент) с «полускалярным» произведением $\mathsf{M}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – математическим ожиданием от скалярного произведения в $\mathbb{R}^l$ – и полунормой $\|\mathbf{x}\|=[\mathsf{M}(\langle\mathbf{x},\ \mathbf{x}\rangle)]^{1/2}$. Для этих выражений выполняются все свойства соответственно скалярного произведения и нормы, кроме свойства, что $\mathsf{M}(\langle\mathbf{x},\ \mathbf{x}\rangle)>0$ для всех $\mathbf{x}\neq 0$. Эти свойства следуют из соответствующих свойств скалярного произведения в $\mathbb{R}^l$ и свойств математического ожидания. Из того что $\mathsf{M}(\langle\mathbf{x},\ \mathbf{x}\rangle)=0$, не следует, что $\mathbf{x}=0$, однако верно, что $\mathsf{P}\{\mathbf{x}=0\}=1$ (это справедливо в силу неравенства Чебышева и непрерывности снизу вероятностной меры, см. [7]). Чтобы была определена норма, нужно рассматривать пространство классов эквивалентных случайных величин из $\mathbb{R}^l_\omega$, эквивалентность понимается в смысле равенства с вероятностью 1 (почти наверное, почти всюду). Для дальнейших рассуждений не принципиально, в каком пространстве работать – в пространстве $\mathbb{R}^l_\omega$ или в пространстве классов эквивалентности из $\mathbb{R}^l_\omega$, так как решение стохастических ФДУ определяется как вектор-процесс, удовлетворяющий системе с вероятностью 1.

В (1) и (3) $\mathbf{x}_t(\cdot)$ – процесс-предыстория фазового вектора, принадлежащий пространству $Q[-\tau, 0)$ всех l-мерных среднеквадратически кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ случайных процессов $\mathbf{y}(\cdot)$, т. е. имеющих разве лишь конечное число точек разрыва первого рода и среднеквадратически непрерывных справа в точках разрыва, с чебышевской полунормой

$$\|\mathbf{y}(\cdot)\|_Q = \sup\{\|\mathbf{y}(s)\| : -\tau \le s < 0\} = \sup_{-\tau \le s < 0} (\mathsf{M}\{\|\mathbf{y}(s)\|_2^2\})^{\frac{1}{2}},$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма в детерминированном пространстве $\mathbb{R}^l$, $\|x\|_2 = \langle x, x\rangle$. Таким образом, детерминированные вектор-функционал a и матрица-функционал D отображают $[t_0, t_0+\theta] \times \mathbb{R}^l_\omega \times Q[-\tau, 0)$ в $\mathbb{R}^l_\omega$ и $\mathbb{R}^{l\times m}_\omega$ соответственно ($\theta > 0$ – величина временного интервала, $t_0 + \theta = T$; $\tau > 0$ – величина интервала запаздывания). По аналогии с физикой a называется коэффициентом сноса, а D – коэффициентом диффузии.

Мы изучаем систему (1) в *фазовом пространстве* $H = \mathbb{R}^l_\omega \times Q[-\tau, 0)$; таким образом, *фазовым состоянием* системы является пара $\{\mathbf{x}(t); \mathbf{x}_t(\cdot)\} \in H$. Система ФДУ (1) с заданными начальными условиями (2) и (3) образует задачу Коши.

Пусть $\mathbf{B}_{t_1,\, t_2}(d\mathbf{w})$ – минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы случайные величины $\mathbf{w}(s) - \mathbf{w}(t)$ для любых t и s: $t_1 \le t < s \le t_2$. Предполагается, что σ-алгебры $\mathbf{B}_{t_0-\tau,\, t_0}(h_{t_0}\mathbf{y}^0,\ \mathbf{x}_0)$ и $\mathbf{B}_{t_0,\, T}(d\mathbf{w})$ независимы (здесь $h_{t_0}\mathbf{y}^0$ – оператор сдвига аргумента на $-t_0$: $h_{t_0}\mathbf{y}^0(s) = \mathbf{y}^0(s - t_0)$, $\mathbf{B}_{t_0-\tau,\, t_0}(h_{t_0}\mathbf{y}^0,\ \mathbf{x}_0)$ – минимальная σ-алгебра, порожденная случайной величиной $\mathbf{x}_0$ и случайным процессом $\mathbf{y}^0(s)$ при $t_0 - \tau \le s < t_0$).

Определение 1. Случайный вектор-процесс $x = \varphi(t, \omega)$ называется *решением задачи* (1)–(3), если:

1) σ-алгебра $\mathbf{B}_{t,\, T}(d\mathbf{w})$ для любого $t \in [t_0, T)$ не зависит от σ-алгебры $\mathbf{B}_{t_0-\tau,\, t_0}(h_{t_0}\mathbf{y}^{\mathbf{0}},\ \mathbf{x}_0) \cup \mathbf{B}_{t_0,\, t}(d\mathbf{w})$;

2) $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$;

3) $\varphi(t) = \mathbf{y}^{\mathbf{0}}(t - t_0)$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0)$;

4) на промежутке $(t_0, T]$ (за исключением не более чем конечного числа точек) $\varphi(t)$ с вероятностью 1 удовлетворяет системе уравнений

$$\varphi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} a(s, \varphi(s), \varphi_s(\cdot))\, ds + \int_{t_0}^{t} D(s, \varphi(s), \varphi_s(\cdot))\, d\mathbf{w}(s), \qquad (4)$$

где второй интеграл понимается в смысле Ито (существует в среднеквадратическом смысле, см. [8]).

Выражение (4) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} a(s, \varphi(s), \varphi_s(\cdot))\ ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \sigma_i(s, \varphi(s), \varphi_s(\cdot))\ d\mathbf{w}_i(s), \qquad (5)$$

где σ_i – i-й столбец матрицы D; $\mathbf{w}_i$ – i-я компонента вектора $\mathbf{w}$. (Интеграл от вектора – вектор, компонентами которого являются интегралы от соответствующих компонент подынтегрального вектора.)

Нам необходимо найти решение задачи Коши (1)–(3).

Далее будем считать, что отображения $a(t, x, y(\cdot))$ и $D(t, x, y(\cdot))$ на своих областях определения:

A1) *непрерывны по сдвигу* как функции детерминированных переменных (см. [4, с. 12]) и

A2) удовлетворяют *равномерным условиям Липшица* по второй и третьей переменной (т. е. существуют постоянные L_i и M_i $(i = 1, 2)$ такие, что для всех $t \in [t_0, t_0 + \theta]$ и $\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}\}$ & $\{\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}\} \in H$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &\|a(t, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}(\cdot)) - a(t, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}(\cdot))\|^2 \le \\ &\le L_1 \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|^2 + M_1 \|\mathbf{y}^{(1)}(\cdot) - \mathbf{y}^{(2)}(\cdot)\|_Q^2, \qquad (6) \\ &\sum_{i=1}^{m} \|\sigma_i(t, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}(\cdot)) - \sigma_i(t, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}(\cdot))\|^2 \le \\ &\le L_2 \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|^2 + M_2 \|\mathbf{y}^{(1)}(\cdot) - \mathbf{y}^{(2)}(\cdot)\|_Q^2). \qquad (7) \end{aligned}$$

Заметим, что неравенства (6) и (7) эквивалентны аналогичным неравенствам без квадратов.

Можно считать, что область определения функционалов $\boldsymbol{a}$ и D не разделена на конечномерную и бесконечномерную составляющие процесса $\mathbf{x}$, т. е. функционалы $a(\cdot, \cdot)$ и $D(\cdot, \cdot)$ определены на $[t_0, T] \times C[-\tau, 0]$ ($C[-\tau, 0]$ – пространство непрерывных на $[-\tau, 0]$ функций).

Если

B1) функционалы $a(\cdot, \cdot)$ и $D(\cdot, \cdot)$ непрерывны на $[t_0, T] \times C[-\tau, 0]$ и

B2) для произвольных непрерывных функций $x(\cdot),\ y(\cdot) \in C[-\tau, 0]$ и для всех $t \in [t_0,\ T]$ выполняется равномерное условие Липшица

$$\begin{aligned} &\|a(t, x(\cdot)) - a(t, y(\cdot))\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \|\sigma_i(t, x(\cdot)) - \sigma_i(t, y(\cdot))\|_2^2 \le \\ &\le \int_{-\tau}^{0} \|x(s) - y(s)\|_2^2 dK(s) \qquad (8) \end{aligned}$$

(здесь $x(s)$ – значение функции $x(\cdot)$ в момент $s \in [-\tau, 0]$, а K – неубывающая ограниченная функция, определенная на $[-\tau, 0])$, то для любого начального процесса $\mathbf{x^0}(t) = \mathbf{y^0}(t - t_0)$ $(t \in [t_0 - \tau,\, t_0])$ с непрерывными траекториями и с условием $\sup_{-\tau \le s \le 0} \mathsf{M}(\|\mathbf{y^0}(s)\|_2^4) < \infty$ задача Коши (1)–(3) имеет единственное решение на интервале $[t_0, T]$, имеющее на этом интервале ограниченный четвертый момент, причем $\mathbf{B}_{t_0-\tau,\, t}(\mathbf{x})$ (минимальная σ-алгебра, порожденная случайным процессом $\mathbf{x}(s)$ при $t_0 - \tau \le s < t$) содержится в $\mathbf{B}_{t_0-\tau,\, t_0}(h_{t_0}\mathbf{y}^0,\ \mathbf{x}_0) \cup \mathbf{B}_{t_0,\, t}(d\mathbf{w})$ для любого $t \in [t_0, T)$, см. [9]. Единственность понимается в смысле стохастической эквивалентности, т. е.

$$P\{x_1(t) = x_2(t)\} = 1, \quad P\left\{\sup_{t_0 \le t \le T} \|x_1(t) - x_2(t)\|_2 > 0\right\} = 0.$$

Если конечномерную и бесконечномерную составляющие процесса $\mathbf{x}$ не разделять, то для непрерывных функций, если функционалы $a(\cdot,\cdot)$ и $D(\cdot,\cdot)$ удовлетворяют условиям B1 и B2, соответствующие функционалы a и D (от трех переменных) удовлетворяют условиям A1 и A2. (Условие A2 следует из условия B2, так как по теореме Кантора из непрерывности функции на отрезке следует ее равномерная непрерывность.) Так же в силу теоремы Кантора из условий A1 и A2 следует условие B1. Однако условие B2 не следует из условий A1 и A2. Далее не предполагается, что выполнены условия B1 и B2, однако предполагается, что задача Коши (1)–(3) имеет единственное решение с ограниченным четвертым моментом. Отметим также, что существуют и другие условия существования и единственности решения задачи Коши (1)–(3) (для частных случаев).

Наша задача – построить численный метод для решения задачи (1)–(3) и доказать теорему о сходимости данного метода.

3. Численный метод Эйлера с кусочно-постоянной интерполяцией

Проведем дискретизацию. Зададим равномерную временную сетку $t_n = t_0 + nh$, $n = 0, 1, \ldots, N$, с шагом $h = \theta/N$, где N – целое положительное число. Для простоты будем считать, что $\tau/h = k$ – целое положительное число. Обозначим приближение точного решения (одной реализации, которую мы ищем) $\tilde{x}(t_n) = \tilde{x}_n$ в точке t_n через $\tilde{u}_n \in \mathbb{R}^l$ $(\tilde{u}_i = \tilde{x}_i \equiv \tilde{y}^0(t_0 - t_i)$ при $-k \le i \le -1$, $\tilde{u}_0 = \tilde{x}_0)$. Имеем $\tilde{u}_n \approx \tilde{x}_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Соответствующие случайные векторы, как и ранее, обозначаем жирным шрифтом и без тильды: $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{u}_n$. Последовательность $\{\tilde{u}_n\}$, которая аппроксимирует решение (одну реализацию) $\tilde{x}(t)$, будем называть *дискретной моделью (численной моделью)*. Вычисление проводится последовательно, в момент времени t_n ищем следующее приближение $\tilde{u}_{n+1}$.

В отличие от дифференциальных уравнений без запаздывания в системе дифференциальных уравнений с запаздыванием функционалы a и D в правой части системы определены на случайных процессах-предысториях, поэтому задание дискретной предыстории недостаточно для построения численной модели, адекватной системе (1); нужна часть предыстории данной реализации решения. Для того чтобы определить функционалы a и D на приближенном решении (одной реализации), необходима интерполяция. Простейший способ – кусочно-постоянная интерполяция:

$$I : \{\tilde{u}_i\}_n \to \tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}_i, & t \in [t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \tilde{y}^0(t - t_0), & t \in [t_0 - \tau, t_0) \end{cases} \tag{9}$$

(здесь I – так называемый оператор интерполяции, а $\tilde{y}^0(t)$ – реализация случайного процесса $\mathbf{y}^0(t) = \mathbf{y}^0(t, \omega)$). Отметим, что в момент t_n определена функция-предыстория $\tilde{u}_{t_n}(\cdot)$, если задана дискретная предыстория модели $\{\tilde{u}_i \ \ i \leq n\}$.

Пошаговую модель

$$\tilde{u}_0 = \tilde{x}_0, \tag{10}$$

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h \cdot a(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{t_n}(\cdot)) + D(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{t_n}(\cdot))\Delta_n \tilde{\mathbf{w}}(h) \tag{11}$$

(где $\Delta_n \tilde{\mathbf{w}}(h) = \tilde{\mathbf{w}}(t_{n+1}) - \tilde{\mathbf{w}}(t_n)$ – приращение одной реализации винеровского вектор-процесса) с интерполяцией $\tilde{u}_{t_n}(\cdot)$ по дискретной предыстории (9) назовем *методом Эйлера с кусочно-постоянной интерполяцией.*

Обозначим $\mathbf{z}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n$, $n = 1, 2, \dots, N$. Эти случайные величины являются ошибками численного интегрирования.

Определение 2. Будем говорить, что метод численного интегрирования *сходится* (*сильно*), если $\|\mathbf{z}_n\| = [\mathsf{M}\{(\|\mathbf{z}_n\|_2)^2\}]^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $h \to 0$ для всех $n = 1, 2, \dots, N$. *Порядком сходимости* метода называется такое число $p > 0$, что для некоторой константы C верны оценки $\|\mathbf{z}_n\| \leq Ch^p$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Покажем сходимость метода Эйлера (9)–(11) и докажем, что он имеет порядок сходимости, равный 1/2.

Теорема 1. *Пусть функционалы a и D в правой части системы уравнений задачи Коши* (1))–(3)*, имеющей единственное решение с ограниченным четвертым моментом, удовлетворяют условиям Липшица* (6) *и* (7). *Кроме того, пусть существуют такие числа K_i, $i = 0, 1, \dots, m$, что при малых значениях $|t - s|$ справедливы следующие неравенства:*

$$\|a(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(\cdot)) - a(s, \mathbf{x}, \mathbf{y}(\cdot))\|^2 \leq K_0 \left(1 + \|\mathbf{x}\|^4 + \|\mathbf{y}(\cdot)\|_Q^4\right) |t - s|, \tag{12}$$

$$\|\sigma_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(\cdot)) - \sigma_i(s, \mathbf{x}, \mathbf{y}(\cdot))\|^2 \leq K_i \left(1 + \|\mathbf{x}\|^4 + \|\mathbf{y}(\cdot)\|_Q^4\right) |t - s|. \tag{13}$$

Тогда метод Эйлера с кусочно-постоянной интерполяцией сходится, причем порядок сходимости метода равен $1/2$.

Доказательство. Согласно (5)

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot))\ ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sigma_i(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot))\ d\mathbf{w}_i(s).$$

Тогда, учитывая (11), получаем

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \big(\ a(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - a(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\ \big)\ ds +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \big(\ \sigma_i(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - \sigma_i(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\ \big)\ d\mathbf{w}_i(s).$$

Оценим величину $\|\mathbf{z}_{n+1}\|^2$ через выражение от $\|\mathbf{z}_n\|^2$:

$$\|\mathbf{z}_{n+1}\|^2 = \mathsf{M}\{(\|\mathbf{z}_{n+1}\|_2)^2\} = \mathsf{M}\{(\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}\|_2)^2\} =$$
$$= \mathsf{M}\langle \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1},\ \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}\rangle = \mathsf{M}\langle \mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n,\ \mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n\rangle +$$
$$+ 2\ \mathsf{M}\left\langle \mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n,\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} (a(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - a(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, ds \right\rangle +$$
$$+ 2\ \mathsf{M}\left\langle \mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n,\ \sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\sigma_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t(\cdot)) - \sigma_i(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, d\mathbf{w}_i(s) \right\rangle +$$
$$+ \mathsf{M}\Bigg(\Bigg\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (a(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - a(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, ds +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\sigma_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t(\cdot)) - \sigma_i(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, d\mathbf{w}_i(s) \Bigg\|_2 \Bigg)^2. \tag{14}$$

Заметим, что третье слагаемое в правой части равенства (14) равно нулю. Это следует из того, что скалярное произведение в евклидовом пространстве есть сумма произведений соответствующих координат, математическое ожидание от суммы случайных величин есть сумма их математических ожиданий. Также учитывается определение стохастического интеграла Ито и тот факт, что случайный вектор $\mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n$ измерим относительно $\mathcal{F}_{t_n}$, а значит, он не зависит от приращений винеровского процесса $\mathbf{w}$ на промежутке $[t_n, t_{n+1}]$. Кроме того, $\mathsf{M}\{\mathbf{w}(t)\} = \mathbf{0}$ – нуль-вектор (подобно [10, с. 31]).

Для второго слагаемого равенства (14) применим неравенство Коши–Буняковского для «полускалярного» произведения в пространстве $\mathbb{R}^l_\omega$. Оно верно в силу неравенств Коши–Буняковского для скалярного произведения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^l$ и математического ожидания.

Для четвертого слагаемого равенства (14) воспользуемся неравенством треугольника, а также очевидным неравенством

$$2bc \leq b^2 + c^2. \tag{$*$}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{gathered}
\|\mathbf{z}_{n+1}\|^2 \leq \mathsf{M}(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n\|_2)^2 + \\
+2(\mathsf{M}(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n\|_2)^2)^{\frac{1}{2}} \left(\mathsf{M}\left(\left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (a(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - a(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, ds \right\|_2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
+ 2\mathsf{M}\left(\left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (a(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - a(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, ds \right\|_2\right)^2 + \\
+ 2\mathsf{M}\left(\left\| \sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\sigma_i(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - \sigma_i(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, d\mathbf{w}_i(s) \right\|_2\right)^2.
\end{gathered} \tag{15}$$

В силу определения скалярного произведения в детерминированном евклидовом пространстве, определения стохастического интеграла Ито и свойств математического ожидания, а также независимости компонент винеровского вектор-процесса $\mathbf{w}$ верно следующее:

$$\begin{gathered}
\mathsf{M}\left(\left\| \sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\sigma_i(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - \sigma_i(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, d\mathbf{w}_i(s) \right\|_2\right)^2 = \\
= \sum_{i=1}^{m} \mathsf{M}\left(\left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\sigma_i(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - \sigma_i(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, d\mathbf{w}_i(s) \right\|_2\right)^2 = \\
= \sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathsf{M}(\|\sigma_i(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - \sigma_i(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|_2)^2\, ds
\end{gathered} \tag{16}$$

(см., например, [10]).

Учитывая неравенство Гельдера для интегралов, получаем

$$\begin{gathered}
\mathsf{M}\left(\left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (a(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - a(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)))\, ds \right\|_2\right)^2 \leq \\
\leq h \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathsf{M}(\|a(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}_s(\cdot)) - a(t_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|_2)^2\, ds.
\end{gathered} \tag{17}$$

С учетом неравенств (16) и (17) из выражения (15) получаем

$$\|\mathbf{z}_{n+1}\|^2 \leq \|\mathbf{z}_n\|^2 +$$

$$+\,2\|\mathbf{z}_n\|\cdot h^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|a(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-a(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\,2\,h\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|a(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-a(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2\,ds+$$
$$+\,2\sum_{i=1}^{m}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\sigma_i(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-\sigma_i(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2\,ds. \tag{18}$$

Применим неравенство $(*)$ ко второму слагаемому в правой части выражения (18). Получим

$$2\|\mathbf{z}_n\|\cdot h^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|a(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-a(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le\|\mathbf{z}_n\|^2\cdot h+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|a(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-a(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2\,ds.$$

Тогда, считая (без ограничения общности, так как $h\to 0$), что $h\le\frac{1}{2}$, из (18) имеем

$$\|\mathbf{z}_{n+1}\|^2\le\|\mathbf{z}_n\|^2(1+h)+$$
$$+\,2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\Big(\|a(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-a(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\|\sigma_i(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-\sigma_i(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2\Big)\,ds. \tag{19}$$

Учитывая неравенство треугольника, неравенство $(*)$, условия Липшица, а также условия (12) и (13), получаем (при $t_n<s<t_{n+1}$)

$$\|a(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-a(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\|\sigma_i(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-\sigma_i(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2\le$$
$$\le 2\,\Big(\|a(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-a(t_n,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))\|^2+$$
$$+\,\|a(t_n,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-a(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\|\sigma_i(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-\sigma_i(t_n,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))\|^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\|\sigma_i(t_n,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot))-\sigma_i(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2\Big)\le$$

$$\le 2\bigg(K_0 \left(1 + \|\mathbf{x}(s)\|^4 + \|\mathbf{x}_s(\cdot)\|_Q^4\right)(s - t_n) + L_1 \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{u}_n\|^2 +$$
$$+ M_1 \|\mathbf{x}_s(\cdot) - \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2 + \sum_{i=1}^{m} K_i \left(1 + \|\mathbf{x}(s)\|^4 + \|\mathbf{x}_s(\cdot)\|_Q^4\right)(s - t_n) +$$
$$+ L_2 \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{u}_n\|^2 + M_2 \|\mathbf{x}_s(\cdot) - \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2 \bigg) =$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{m} K_i\right)\left(1 + \|\mathbf{x}(s)\|^4 + \|\mathbf{x}_s(\cdot)\|_Q^4\right)(s - t_n) +$$
$$+ (L_1 + L_2)\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{u}_n\|^2 + (M_1 + M_2)\|\mathbf{x}_s(\cdot) - \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2. \tag{20}$$

Согласно теореме существования и единственности решение задачи Коши (1)–(3) имеет ограниченный четвертый момент на $[t_0, T]$. Поэтому для некоторого числа K выполняется неравенство

$$\left(\sum_{i=0}^{m} K_i\right)\left(1 + \|\mathbf{x}(s)\|^4 + \|\mathbf{x}_s(\cdot)\|_Q^4\right) \le K. \tag{21}$$

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным ранее (неравенство Коши–Буняковского, неравенство (*), независимость z_n от $d\mathbf{w}(s_1)$ при $s_1 \ge t_n$, свойство интеграла Ито), получаем

$$\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_n - \mathbf{u}_n\|^2 =$$
$$= \left\| \int_{t_n}^{s} a(s_1, \mathbf{x}(s_1), \mathbf{x}_{s_1}(\cdot))\, ds_1 + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{s} \sigma_i(s_1, \mathbf{x}(s_1), \mathbf{x}_{s_1}(\cdot))\, d\mathbf{w}_i(s_1) + \mathbf{z}_n \right\|^2 \le$$
$$\le 2\|z_n\|^2 + 3\left\| \int_{t_n}^{s} a(s_1, \mathbf{x}(s_1), \mathbf{x}_{s_1}(\cdot))\, ds_1 \right\|^2 +$$
$$+ 2\left\| \sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{s} \sigma_i(s_1, \mathbf{x}(s_1), \mathbf{x}_{s_1}(\cdot))\, d\mathbf{w}_i(s_1) \right\|^2 \le$$
$$\le 2\|z_n\|^2 + 3(s - t_n) \int_{t_n}^{s} \|a(s_1, \mathbf{x}(s_1), \mathbf{x}_{s_1}(\cdot))\|^2\, ds_1 +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{m} \int_{t_n}^{s} \|\sigma_i(s_1, \mathbf{x}(s_1), \mathbf{x}_{s_1}(\cdot))\|^2\, ds_1 \qquad (s \ge t_n). \tag{22}$$

Так как ограничен четвертый момент решения задачи Коши, то, в силу неравенства Ляпунова (см., например, [7]), ограничен и второй момент решения. Из неравенства (12) вектор-функция $a(t, \mathbf{0}, \mathcal{O})$ ($\mathcal{O}$ – нулевая вектор-функция) непрерывна по t на отрезке $[t_0, T]$, а значит, и ограничена на этом отрезке. Учитывая эти факты, а также условия Липшица, имеем

$$\|a(s_1,\mathbf{x}(s_1),\mathbf{x}_{s_1}(\cdot))\|^2 = \|a(s_1,\mathbf{x}(s_1),\mathbf{x}_{s_1}(\cdot)) - a(s_1,\mathbf{0},\mathcal{O}) + a(s_1,\mathbf{0},\mathcal{O})\|^2 \leq$$
$$\leq 2\|a(s_1,\mathbf{x}(s_1),\mathbf{x}_{s_1}(\cdot)) - a(s_1,\mathbf{0},\mathcal{O})\|^2 + 2\|a(s_1,\mathbf{0},\mathcal{O})\|^2 \leq$$
$$\leq 2L_1\|\mathbf{x}(s_1)\|^2 + 2\ M_1\|\mathbf{x}_{s_1}(\cdot))\|_Q^2 + 2\ P \leq R_1. \tag{23}$$

Аналогично показывается, что

$$\sum_{i=1}^{m} \|\sigma_i(s_1,\mathbf{x}(s_1),\mathbf{x}_{s_1}(\cdot))\|^2 \leq R_2. \tag{24}$$

Таким образом, из (22) с учетом (23) и (24) получаем

$$\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{u}_n\|^2 \leq 2\|z_n\|^2 + 3R_1(s-t_n)^2 + 2R_2(s-t_n). \tag{25}$$

Пусть $\hat{\mathbf{x}}(t)$ – кусочно-постоянный случайный процесс, определяемый соотношением

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{x}(t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1})).$$

Тогда, применяя неравенство треугольника, неравенство (*) и учитывая предыдущее рассуждение (неравенство (25)), имеем, что при $s \in [t_n, t_{n+1}]$

$$\|\mathbf{x}_s(\cdot) - \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2 = \|\mathbf{x}_s(\cdot) - \mathbf{x}_{t_n}(\cdot) + \mathbf{x}_{t_n}(\cdot) - \hat{\mathbf{x}}_{t_n}(\cdot) + \hat{\mathbf{x}}_{t_n}(\cdot) - \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2 \leq$$
$$\leq 3\|\mathbf{x}_s(\cdot) - \mathbf{x}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2 + 3\|\mathbf{x}_{t_n}(\cdot) - \hat{\mathbf{x}}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2 + 3\|\hat{\mathbf{x}}_{t_n}(\cdot) - \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2 \leq$$
$$\leq 9R_1(s-t_n)^2 + 6R_2(s-t_n) + 9R_1h^2 + 6R_2h + 3\max_{n-k\leq i\leq n}\|\mathbf{x}_i - \mathbf{u}_i\|^2 \leq$$
$$\leq 9R_1(h^2 + (s-t_n)^2) + 6R_2(h\ +\ s-t_n) + 3\max_{n-k\leq i\leq n}\|\mathbf{z}_i\|^2. \tag{26}$$

Учитывая (21), (25) и (26), из (20) получаем

$$\|a(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot)) - a(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\|^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\|\ \sigma_i(s,\mathbf{x}(s),\mathbf{x}_s(\cdot)) - \sigma_i(t_n,\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{t_n}(\cdot))\ \|^2 \leq$$
$$\leq K(s-t_n) + 2L\|z_n\|^2 + 3LR_1(s-t_n)^2 + 2LR_2(s-t_n) +$$
$$+ 3M\max_{n-k\leq i\leq n}\|\mathbf{z}_i\|^2 + 9MR_1(h^2 + (s-t_n)^2) + 6MR_2(h\ +\ s-t_n) \tag{27}$$

(здесь $L = L_1 + L_2$, $M = M_1 + M_2$).

Подставляя (27) в (19), получаем

$$\|\mathbf{z}_{n+1}\|^2 \leq \|\mathbf{z}_n\|^2(1+h) + 4L\|z_n\|^2h +$$

$$+ 6M \max_{n-k\le i\le n} \|\mathbf{z}_i\|^2 h + 2\ (K + 2LR_2 + 6MR_2)\frac{h^2}{2} + 12MR_2h^2 +$$
$$+ 2\ (3LR_1 + 9MR_1)\frac{h^3}{3} + 18MR_1h^3 = \|\mathbf{z}_n\|^2(1 + (1 + 4L)h) +$$
$$+ 6M \max_{n-k\le i\le n} \|\mathbf{z}_i\|^2 h + \Big(K + 2LR_2 + 18MR_2 + (2LR_1 + 24MR_1)h\Big)h^2.$$

Обозначим $\epsilon_n = \|\mathbf{z}_n\|^2$. Так как величина шага h ограничена сверху, то мы показали, что для некоторых чисел A, B и C (не зависящих от n, N и h) выполняется равенство

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n(1 + Ah) + hB \max_{n-k\le i\le n} \epsilon_n + h^2C. \tag{28}$$

Индукцией по n докажем оценку

$$\epsilon_n \le (1 + h(A + B + 1))^n Ch. \tag{29}$$

База индукции выполняется, так как $\epsilon_0 = 0$.

Шаг индукции. Пусть оценка (29) выполняется для всех индексов, меньших n, покажем ее справедливость для $n + 1$.

Пусть максимум в правой части оценки (28) достигается на индексе $i_0 \le n$; тогда, применяя индуктивное предположение к e_n и ϵ_{i_0}, получаем

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n(1 + Ah) + hB\epsilon_{i_0} + h^2C \le$$
$$\le (1 + h(A + B + 1))^n Ch(1 + Ah) + hB(1 + h(A + B + 1))^{i_0} Ch + h^2C \le$$
$$\le (1 + h(A + B + 1))^n Ch(1 + Ah + Bh + h).$$

Оценка (29) доказана.

Так как $N = \frac{\theta}{h}$, то для всех $n = 0, \dots, N$ имеем оценку

$$\epsilon_n \le (1 + h(A + B + 1))^{\frac{\theta}{h}} Ch \le e^{(A+B+1)\theta} Ch.$$

Эта оценка и содержит утверждение теоремы.

Замечание 1. При применении метода Эйлера для численного интегрирования системы стохастических функционально-дифференциальных уравнений можно (и эффективнее) использовать кусочно-линейную интерполяцию:

$$I : \{\tilde{u}_i\}_n \to \tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}_i + \frac{(t-t_i)}{h}(\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i), & t \in [t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \tilde{y}^0(t - t_0), & t \in [t_0 - \tau, t_0). \end{cases}$$

Тогда в численной схеме (11) функционалы a и D определены на непрерывной функции-предыстории $\tilde{u}_{t_n}(\cdot)$. Будем предполагать, что выполняются условия B1 и B2 (функционалы a и D определены на пространстве непрерывных функций). Пусть также начальный случайный процесс-предыстория имеет непрерывные реализации и ограниченный четвертый момент. Тогда задача Коши (1)–(3) имеет единственное решение с ограниченным четвертым моментом на всем конечном отрезке интегрирования и, кроме того, выполняются используемые при доказательстве теоремы о сходимости метода Эйлера условия A1 и A2.

Из выкладок, проведенных в теореме, следует (см. ниже), что кусочно-линейная аппроксимация на всем промежутке интегрирования $[t_0, T]$ имеет тот же порядок точности, что и аппроксимация в узлах. Поэтому метод Эйлера с кусочно-линейной интерполяцией также имеет порядок сходимости, равный 1/2.

Доказательство. Действительно, пусть в (26)

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t_i) + \frac{(t-t_i)}{h}(\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i))$$

при $t \in [t_i, t_{i+1})$. Тогда, в силу того, что $\sup\{\frac{(t-t_i)}{h} : \ t \in [t_i, t_{i+1})\} = 1$, справедливо равенство $\|\hat{\mathbf{x}}_{t_n}(\cdot) - \mathbf{u}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2 = \max\{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{u}_i\|^2 : \ n-k \le i \le n\}$ (та же оценка, что и для кусочно-постоянной интерполяции). Кроме того, учитывая неравенство треугольника и однородность полунормы, имеем

$$\|\mathbf{x}_{t_n}(\cdot) - \hat{\mathbf{x}}_{t_n}(\cdot)\|_Q^2 =$$

$$= \left(\max_{n-k \le i \le n-1} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1})} \left\| \mathbf{x}(t) - \left(1 - \frac{t-t_i}{h}\right)\mathbf{x}(t_i) - \frac{t-t_i}{h}\mathbf{x}(t_{i+1}) \right\| \right)^2 =$$

$$= \left(\max_{n-k \le i \le n-1} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1})} \left\| (1 - \frac{t-t_i}{h})(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_i)) + \frac{t-t_i}{h}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_{i+1})) \right\| \right)^2 =$$

$$= \left(\max_{n-k \le i \le n-1} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1})} ((1 - \frac{t-t_i}{h})\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_i)\| + \frac{t-t_i}{h}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_{i+1})\|) \right)^2 \le$$

$$\le \left(\max_{n-k \le i \le n-1} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1})} \max\{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_i)\|, \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_{i+1})\|\} \right)^2 \le$$

$$\le 3R_1h^2 + 2R_2h.$$

Таким образом, справедлива та же самая оценка, что и для случая кусочно-постоянной интерполяции.

Описанный выше метод Эйлера с кусочно-постоянной интерполяцией является простейшим из сходящихся методов. Он очень прост с вычислительной точки зрения, однако обладает низким порядком сходимости. Дальнейшее улучшение свойств сходимости возможно, во-первых, за счет усложнения интерполяции; во-вторых, за счет усложнения пошаговой модели. Однако в отличие от обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений эффект последействия в стохастических функционально-дифференциальных уравнениях не позволяет в общем случае непосредственно скомбинировать результаты работ [2] и [4].

4. Численные эксперименты

Для иллюстрации работы программной реализации метода Эйлера с помощью системы MATLAB в этом разделе приведены результаты численного интегрирования нескольких тестовых примеров. В этих примерах известно точное решение задачи Коши для уравнения с отсутствующей стохастической составляющей. Заметим, что в реальных задачах нередко случайные помехи малы. Это значит, что малы по модулю коэффициенты при приращениях стандартных винеровских процессов (элементы матрицы D). Добавим некоторое количество малых случайных возмущений к детерминированному ФДУ и продемонстрируем, как сильно отличается решение этого детерминированного ФДУ от реализации стохастического ФДУ. На приведенных ниже рисунках точное решение детерминированного ФДУ обозначается сплошной линией, а реализация стохастического ФДУ – маркером (плюсом) соответственно временной сетке.

Пример 1. Линейная система второго порядка, содержащая переменное сосредоточенное и распределенное запаздывания,

$$\begin{cases} d\mathbf{x}_1(t) = \Big(-\sin(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_1(t-\tfrac{t}{2}) - \int_{-\frac{t}{2}}^{0} \sin(t+s)\mathbf{x}_1(t+s)ds - e^{\cos(t)}\Big)\, dt + \\ \qquad + 0.1\left(\mathbf{x}_1(t-\tfrac{t}{2}) + \mathbf{x}_2(t-\tfrac{t}{2})\right)\, d\mathbf{w}_1(t) + \\ \qquad + 0.1\left(\int_{-\frac{t}{2}}^{0} \sin(t+s)\mathbf{x}_1(t+s)ds\right)\, d\mathbf{w}_2(t) + 0.1\cdot\mathbf{x}_2(t)d\mathbf{w}_3(t), \\ d\mathbf{x}_2(t) = \Big(\cos(t)x_2(t) + x_2(t-\tfrac{t}{2}) - \int_{-\frac{t}{2}}^{0} \cos(t+s)\mathbf{x}_2(t+s)ds - e^{\sin(t)}\Big)\, dt + \\ \qquad + 0.1\left(\int_{-\frac{t}{2}}^{0} \sin(t+s)\mathbf{x}_2(t+s)ds\right)\, d\mathbf{w}_1(t) + \\ \qquad + 0.1\mathbf{x}_1(t)d\mathbf{w}_2(t) + 0.1\left(\mathbf{x}_1(t-\tfrac{t}{2}) - \mathbf{x}_2(t-\tfrac{t}{2})\right)\, d\mathbf{w}_3(t) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x_1(t) = e^{\cos(t)}, \quad x_2(t) = e^{\sin(t)} \quad \text{при } t \le 0.$$

Система рассматривается на отрезке $[0,\pi]$. Соответствующая система детерминированных ФДУ имеет точное решение, задаваемое теми же формулами, что и начальные условия. На рис. 1 приведены графики координат решения.

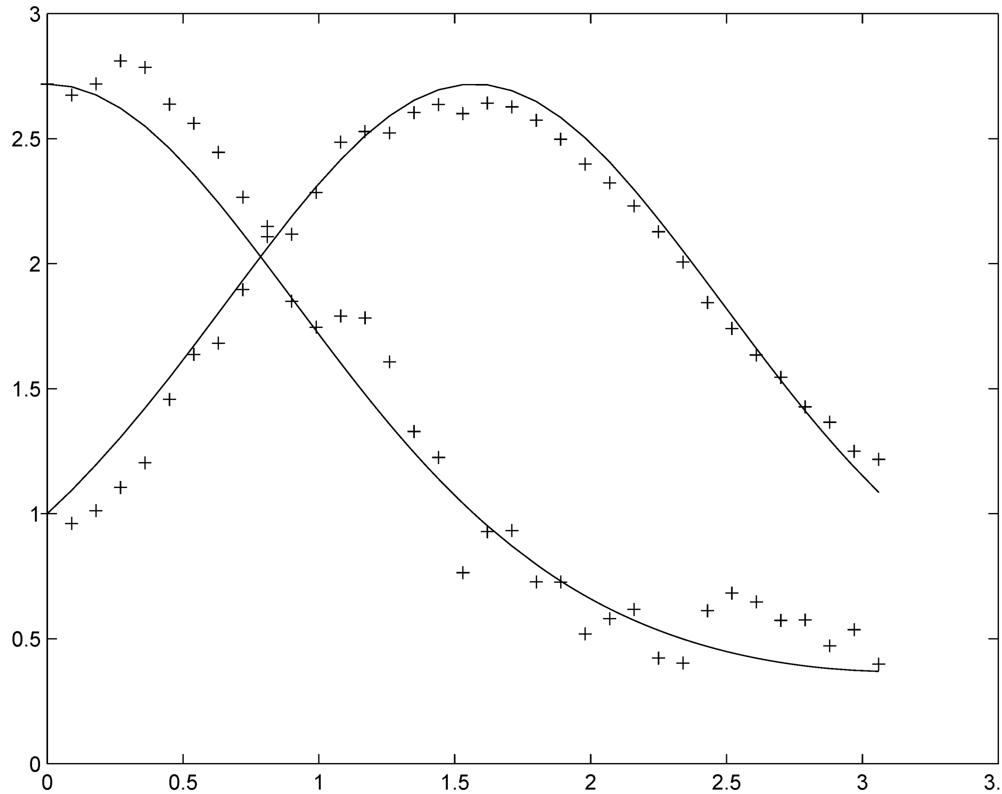

Рис. 1

Пример 2. Нелинейная система второго порядка с распределенным запаздыванием

$$\begin{cases} d\mathbf{x}_1(t) = \left(-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\mathbf{x}_1(t+s)ds + \frac{2\mathbf{x}_1(t)-\frac{\pi}{2}\mathbf{x}_2(t)}{\sqrt{\mathbf{x}_1^2(t)+\mathbf{x}_2^2(t)}}\right)dt + \\ \qquad + 0.2\left(\mathbf{x}_1(t) - \int_{-\pi}^{0}\mathbf{x}_2(t+s)ds\right)d\mathbf{w}(t), \\ d\mathbf{x}_2(t) = \left(-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\mathbf{x}_2(t+s)ds + \frac{2\mathbf{x}_1(t)+\frac{\pi}{2}\mathbf{x}_2(t)}{\sqrt{\mathbf{x}_1^2(t)+\mathbf{x}_2^2(t)}}\right)dt + \\ \qquad + 0.2\left(\mathbf{x}_2(t) + \int_{-\pi}^{0}\mathbf{x}_1(t+s)ds\right)d\mathbf{w}(t) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x_1(t) = t\ \cos(t), \quad x_2(t) = t\ \sin(t) \ \text{ при } t \le 1.$$

Система рассматривается на отрезке $[1, 11]$. Соответствующая система детерминированных ФДУ имеет точное решение, задаваемое теми же формулами, что и начальные условия. На рис. 2 приведены графики решения (две координаты).

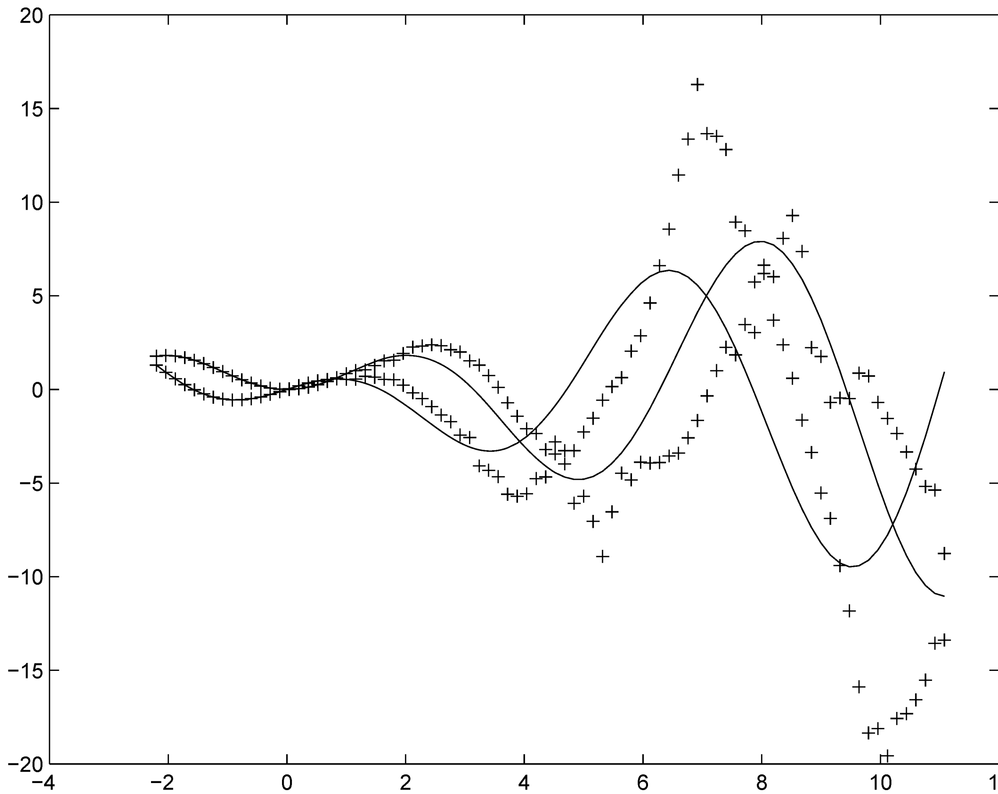

Рис. 2

Пример 3. Уравнение с постоянным распределенным и переменным сосредоточенным запаздыванием

$$d\mathbf{x} = \left(\int_{t-1}^{t} \mathbf{x}(\xi)d\xi\right) dt + 0.5\ \mathbf{x}(t - (e^{-t} + 1))d\mathbf{w}_1 + 0.3\ \left(\int_{t-1}^{t} \mathbf{x}(\xi)d\xi\right) d\mathbf{w}_2$$

с начальным условием $x(t) = e^{\lambda_0 t}$, $t \in [-2, 0]$ (λ_0 – вещественный корень уравнения $\lambda^2 - 1 = -e^{-\lambda}$). Система рассматривается на отрезке $[0, 3]$. Соответствующее детерминированное ФДУ имеет точное решение, задаваемое той же формулой, что и начальное условие. На рис. 3 приведены графики решения (точное решение детерминированного ФДУ и три реализации стохастического ФДУ).

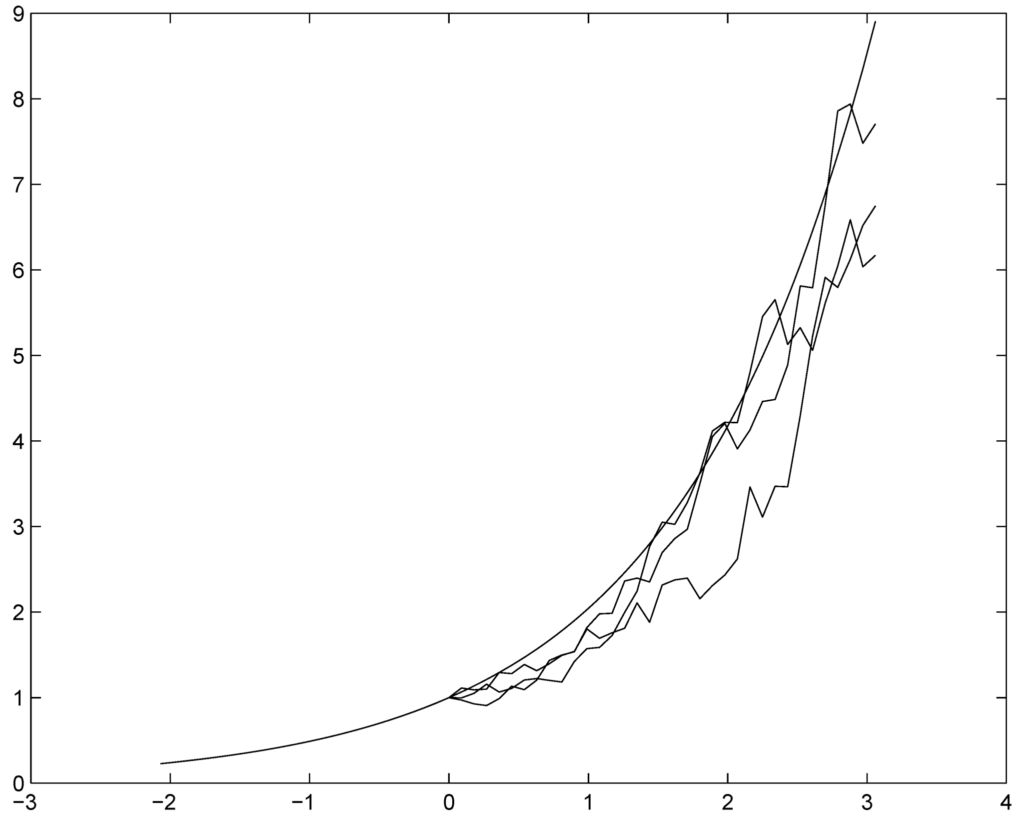

Рис. 3

Стоит отметить, что при программной реализации метода (с помощью системы MATLAB) интегралы, соответствующие распределенным запаздываниям, считаются точно (аналитически), однако можно использовать квадратурные формулы, гарантирующие определенную точность.

Литература

1. Кузнецов Д. Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СПб.: Наука, 1999.

2. Мильштейн Г. Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1988.

3. Кушнер Г. Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985.

4. Пименов В. Г. Функционально-дифференциальные уравнения: Численные методы. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1998.

5. Buckwar E. Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations // J. Computation Applied Math. 2000. Vol. 125. P. 297–307.

6. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965.

7. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1985.

8. Kolmanovskii V., Myshkis A. Applied theory of functional differential equations. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Academic Publishers, 1992.

9. Ito K., Nisio M. On stationary solution of a stochastic differential equation // J. Math. Sci. Kyoto. Univ. 1954. Vol. 4. P. 1–75.

10. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968.

Статья поступила 15.09.2002 г.
Окончательный вариант 18.10.2003 г.